Calcul différentiel

Différentielle

Exercice 1 [00028] [correction]
Justifier que la fonction $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 1/z$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 2 [00029] [correction]
Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finies et $\varphi : E \times E \to F$ une application bilinéaire.
Etablir que φ est différentiable et calculer sa différentielle $\mathrm{d}\varphi$.

Exercice 3 [00030] [correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien.
a) En quels points l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est-elle différentiable ?
b) Préciser en ces points le vecteur gradient.

Exercice 4 [00031] [correction]
a) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$.
Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \mathrm{tr}(M^3)$.
Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 [00032] [correction]
a) Justifier que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
b) Calculer la différentielle de det en I_n puis en tout M inversible.
c) En introduisant la comatrice de M, exprimer la différentielle de det en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 [00033] [correction]
Montrer que $A \mapsto \det A$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en commençant par évaluer ses dérivées partielles.

Exercice 7 [00034] [correction]
Déterminer la différentielle en I_n puis en $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de $M \mapsto M^{-1}$.

Exercice 8 [00035] [correction]
Montrer que l'application

$$P \mapsto \int_0^1 P(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ est différentiable et exprimer sa différentielle.

Exercice 9 [00036] [correction]
Soit $f : E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$.
Montrer que f est linéaire.

Exercice 10 [00037] [correction]
Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de E.
a) Montrer que l'application $f : x \in E \mapsto (u(x) \mid x)$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point.
b) Montrer que l'application $F : x \in E \setminus \{0\} \mapsto \frac{(u(x)|x)}{(x|x)}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et que sa différentielle vérifie :

$$\mathrm{d}F(a) = 0 \Leftrightarrow a \text{ est vecteur propre de } u$$

Exercice 11 Mines-Ponts MP [02904] [correction]
Si $p \in \mathbb{N}$, soit $f_p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto (x + y)^p \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
a) Condition nécessaire et suffisante pour que f_p se prolonge par continuité en $(0, 0)$?
b) La condition de a) étant remplie, condition nécessaire et suffisante pour que le prolongement obtenu soit différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 12 X MP [02976] [correction]
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$.
On suppose que $\mathrm{d}f(x)$ est orthogonale pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
Montrer que f est orthogonale.

Exercice 13 X MP [03050] [correction]
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $\mathrm{d}\varphi(0)$ soit inversible.
Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 tel que la restriction de φ à V soit injective.

Dérivées partielles et classe

Exercice 14 [00040] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)\ln(x^2 + y^2)$$

a) Est-il possible de prolonger f par continuité en $(0,0)$?
b) Etablir que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et, sans calculs, établir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$

c) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 15 [00041] [correction]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2) - f(0)}{x^2+y^2}$$

a) Déterminer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$. On prolonge F par continuité en $(0,0)$ et on suppose de surcroît f de classe $\mathcal{C}^2$.
b) Justifier que F est différentiable en $(0,0)$ et y préciser sa différentielle.
c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 16 Centrale MP [02460] [correction]
On pose $\varphi(x,y) = \frac{\cos x - \cos y}{x-y}$ pour $x \neq y$.
a) Montrer que φ admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}^2$ noté encore φ.
b) Montrer que φ est $\mathcal{C}^1$ puis $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 17 Mines-Ponts MP [02905] [correction]
On pose

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

pour x, y réels non tous deux nuls.
La fonction f admet-elle un prolongement continue à $\mathbb{R}^2$? un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$? $\mathcal{C}^2$?

Exercice 18 Mines-Ponts MP [02906] [correction]
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose

$$f(x,y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \text{ pour } x \neq y \text{ et } f(x,x) = g'(x)$$

a) Ecrire f sous forme intégrale et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)$$

Dérivées partielles de fonctions composées

Exercice 19 [00043] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = f(y,x)$$

Quelle relation existe-t-il entre les dérivées partielles de f ?

Exercice 20 [00046] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall t > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$

a) Montrer que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

b) Etablir la réciproque.

Exercice 21 [00047] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

Montrer la constance de l'application suivante

$$\varphi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 22 [00048] [correction]
Soient $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Justifier que g est $\mathcal{C}^1$ et exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

Exercice 23 Centrale PC [01327] [correction]
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R} \\ &(x_1, \dots x_n) \mapsto f\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right) \end{aligned}$$

vérifie

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$$

Exercice 24 [00049] [correction]
Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et exprimer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en fonction des dérivées partielles de g.

Exercice 25 [00050] [correction]
Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

et $g(r,t) = f(r\cos t, r\sin t)$.
a) Trouver une relation liant

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

b) Montrer que

$$\varphi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$$

est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $(r\varphi'(r))' = 0$
c) Conclure que φ est constante.

Exercice 26 [00051] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit $F(x) = \int_{2x}^{x^3} f(x+1,t)\,\mathrm{d}t$.
Démontrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.

Exercice 27 Centrale MP [02461] [correction]
Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est homogène de degré p si, et seulement si,

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = pf(x_1,\dots,x_n)$$

Exercice 28 Mines-Ponts MP [02903] [correction]
Soient $(x_1,\dots,x_n,h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et, si $t \in \mathbb{R}$,
$g(t) = f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n)$. Calculer $g'(t)$.

Matrice jacobienne

Exercice 29 [00052] [correction]
a) Calculer le jacobien de l'application $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$
b) Même question avec $(r,\theta,\varphi) \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

Exercice 30 X MP [01323] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dont la matrice jacobienne est, en tout point, antisymétrique.
Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = Ax + b$$

Difféomorphisme

Exercice 31 [00053] [correction]
Montrer que $(u,v) \mapsto (u+v, uv)$ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de

$$U = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u < v\right\}$$

vers un ouvert V que l'on précisera.

Exercice 32 [00054] [correction]
Montrer que $\varphi : (x,y) \mapsto (x + \frac{1}{2}\cos y, y + \frac{1}{2}\cos x)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Exercice 33 X MP - Mines-Ponts MP [02908] [correction]
Soit $k \in]0,1[$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leqslant k$$

On définit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x,y) = (y + f(x), x + f(y))$$

Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Exercice 34 [01328] [correction]
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on considère $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, croissante vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
On pose

$$F(x) = f\left(\|x\|\right) x$$

a) Montrer que $N : x \mapsto \|x\|$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et exprimer sa différentielle.
b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa différentielle.
c) Montrer que

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (\,\mathrm{d}F(x)(h) \mid h) \geqslant f(\|x\|)\, \|h\|^2$$

d) Montrer que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$.

Fonction somme d'une série numérique

Exercice 35 [00056] [correction]
Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 < R^2$, on pose $f(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x+iy)^n$.
Etablir que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 36 Mines-Ponts MP [02907] [correction]
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n : (x,y) \mapsto \frac{\cos ny}{\sqrt{n}} x^n$. On note D l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que la série de terme général $u_n(x,y)$ converge. On pose
$f : (x,y) \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$.
a) Déterminer D.
b) Montrer que $f_{\restriction D^\circ}$ est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 37 Centrale MP [02466] [correction]
On considère $f : (x,y) \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+y^{2n}}$.
a) Déterminer le domaine de définition D de f.
b) Etudier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur D.

Equations aux dérivées partielles d'ordre 1

Exercice 38 [00044] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \text{ via } \begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$$

Exercice 39 [01765] [correction]
Résoudre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

sur $\mathbb{R}^2$ via le changement de variable

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

Exercice 40 [00076] [correction]
En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 41 [00080] [correction]
En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Exercice 42 Mines-Ponts MP [02912] [correction]
a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+\star}, \mathbb{R})$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

b) Trouver toutes les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+\star}, \mathbb{R})$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y}\sqrt{x^3 + y^3}$$

Exercice 43 Mines-Ponts MP [02913] [correction]
On note U l'ensemble des (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et $E = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; on dit que f est homogène de degré α si $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ pour tous $t \in \mathbb{R}^{+\star}$, $(x, y) \in U$. On pose :

$$\forall f \in E, \forall (x, y) \in U, \Phi(f)(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

a) Déterminer $\ker \Phi$.
b) Soit $f \in E$. Montrer que f est homogène de degré α si, et seulement si, $\Phi(f) = \alpha f$.
c) Résoudre l'équation d'inconnue $f \in E$, $\Phi(f) = h$, h étant la fonction qui à (x, y) associe $(x^2 + y^2)^{3/2}xy$.

Equations aux dérivées partielles d'ordre 2

Exercice 44 [00081] [correction]
En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Exercice 45 [00082] [correction]
En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 46 [00084] [correction]
En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x/y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Extremum

Exercice 47 [00058] [correction]
Déterminer les extrema locaux et globaux de

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Exercice 48 [00059] [correction]
Déterminer les extrema locaux et globaux de

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

Exercice 49 [00060] [correction]
Extrema locaux et globaux de

$$f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$$

Exercice 50 Centrale MP [00061] [correction]
Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$$

Exercice 51 Mines-Ponts MP [02910] [correction]
Quels sont, sur $\mathbb{R}^2$, les extremums de la fonction

$$(x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 ?$$

Exercice 52 Centrale MP [02463] [correction]
Déterminer les extremums de $x^{\ln x} + y^{\ln y}$ sur $]0,+\infty[^2$.

Exercice 53 Centrale MP [02473] [correction]
Avec Maple, trouver les extrema de

$$f(x,y) = y\exp(x) + x\exp(y)$$

Exercice 54 [00065] [correction]
Déterminer

$$\inf_{x,y>0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy\right)$$

Exercice 55 Centrale MP [00070] [correction]
Soit $a > 0$. Montrer que

$$f : (x,y) \mapsto x + y + \frac{a}{xy}$$

admet un minimum strict sur $(\mathbb{R}^{+\star})^2$

Exercice 56 Mines-Ponts MP [00071] [correction]
Soit $a > 0$. On pose, pour $x > 0$ et $y > 0$,

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy}$$

Montrer que f admet un minimum absolu et calculer ce dernier.

Exercice 57 [00072] [correction]
Soient U un ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable.
Montrer que tout point critique est un minimum global.

Exercice 58 [00268] [correction]
Déterminer

$$\sup_{(x,y)\in]0,+\infty[^2} \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$

Extremum sur compact

Exercice 59 [00063] [correction]
Soit $f : (x,y) \mapsto xy(1-x-y)$ définie sur

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\right\}$$

a) Justifier que f est continue et présente un maximum à l'intérieur de T.
b) Déterminer sa valeur.

Exercice 60 [00064] [correction]
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 1$.
a) Montrer que $\mathcal{D}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.
b) Soient $a > 0, b > 0, c > 0$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^a y^b (1-x-y)^c$$

Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}$.
c) Déterminer

$$\sup_{(x,y)\in\mathcal{D}} f(x,y)$$

Exercice 61 [00066] [correction]
Déterminer
$$\sup_{[0,\pi/2]^2} \sin x \sin y \sin(x+y)$$

Exercice 62 [00259] [correction]
Déterminer le maximum de la fonction f définie sur le compact $K = [0,1]^2$ donnée par
$$f(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

Exercice 63 [00067] [correction]
On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.
Quel est le périmètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur $\mathcal{C}$?

Exercice 64 Mines-Ponts MP [02911] [correction]
Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon r.

Exercice 65 Centrale MP [02465] [correction]
Soit un triangle ABC et M parcourant l'intérieur de ce triangle. On veut déterminer en quelle position le produit des 3 distances de M à chacun des côtés du triangle est maximal.
Indications : ne pas oublier de justifier l'existence de ce maximum, la réponse est le centre de gravité du triangle.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Soient $a \in \mathbb{C}^\star$ et $h \in \mathbb{C}$: $f(a+h) - f(a) = \frac{-h}{a(a+h)} = \ell(h) + \alpha(h)$ avec $\ell : h \mapsto -\frac{h}{a^2}$ linéaire et $\alpha(h) = \frac{-h}{a(a+h)} + \frac{h}{a^2} = \frac{h^2}{a^2(a+h)} = O(h^2) = o(h)$. La différentielle de f en a est donc $\ell : h \mapsto -\frac{h}{a^2}$.

Exercice 2 : [énoncé]
On a

$$\varphi(a+h, b+k) = \varphi(a,b) + \varphi(h,b) + \varphi(a,k) + \varphi(h,k) = \varphi(a,b) + \psi(h,k) + o\left(\|(h,k)\|\right)$$

avec $\psi : (h,k) \mapsto \varphi(h,b) + \varphi(a,k)$ linéaire et $\varphi(h,k) = o\left(\|(h,k)\|\right)$ car $|\varphi(h,k)| \leqslant M\,\|h\|\,\|k\|$.
Par suite φ est différentiable en (a,b) et $\mathrm{d}\varphi(a,b) = \psi$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) Pour $x = 0$, $\frac{1}{t}\left(\|0 + t.h\| - \|0\|\right) = \frac{|t|}{t}\|h\|$ n'a pas de limite en 0. Par suite $\|\,.\,\|$ n'est pas différentiable en 0.
Pour $x \neq 0$,

$$\|x+h\| = \sqrt{\|x\|^2 + 2(x \mid h) + \|h\|^2} = \|x\|\sqrt{1 + 2\frac{(x|h)}{\|x\|^2} + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^2}} = \|x\| + \frac{(x|h)}{\|x\|} + o(h)$$

donc $\|\,.\,\|$ est différentiable en x et de différentielle $h \mapsto \frac{(x|h)}{\|x\|}$.
b) Le vecteur gradient en $x \neq 0$ est $x/\|x\|$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) L'application $M \mapsto M^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$f(M+H) - f(M) = MH + HM + H^2 = \varphi(H) + o(\|H\|)$ avec
$\varphi : H \mapsto MH + HM$ linéaire.
Par suite $\mathrm{d}f(M) : H \mapsto HM + MH$.
b) L'application $M \mapsto M^3$ est $\mathcal{C}^1$ car polynomiale et l'application $M \mapsto \mathrm{tr}(M)$ est $\mathcal{C}^1$ car linéaire.
Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$.
Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$f(M+H) - f(M) = \mathrm{tr}(M^2H + HMH + HM^2) + \mathrm{tr}(MH^2 + HMH + HM^2) + \mathrm{tr}(H^3)$.
Posons $\varphi : H \to \mathrm{tr}(M^2H + MHM + HM^2) = 3\mathrm{tr}(M^2H)$. φ est une application linéaire telle que :
$f(M+H) - f(M) = \varphi(H) + \psi(H)$ avec $|\psi(H)| \leqslant C\,\|H\|^2$ donc $\psi(H) = o(\|H\|)$.
Par suite $\mathrm{d}f(M) : H \to 3\mathrm{tr}(M^2H)$.

Exercice 5 : [énoncé]
a) det est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car polynomiale.
b) $\det(I+H) = 1 + \varphi(H) + o(\|H\|)$ avec $\varphi = \mathrm{d}_I(\det)$.
$\det(I_n + \lambda E_{i,j}) = 1 + \lambda\delta_{i,j} = 1 + \lambda\varphi(E_{i,j}) + o(\lambda)$ donc $\varphi(E_{i,j}) = \delta_{i,j}$ puis $\varphi = \mathrm{tr}$.
Si M est inversible :
$\det(M+H) = \det M \det(I + M^{-1}H) = \det M + \det M\,\mathrm{tr}(M^{-1}H) + o(H)$ donc
$\mathrm{d}(\det)(M) : H \mapsto \det M\,\mathrm{tr}(M^{-1}H)$.
c) En M inversible $\mathrm{d}(\det)(M) : H \mapsto \det M\,\mathrm{tr}(M^{-1}H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}M.H)$.
Les applications $M \mapsto \mathrm{d}(\det)(M)$ et $M \mapsto \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}M \times .)$ sont continues et coïncident sur la partie dense $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, elles sont donc égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 : [énoncé]
$A = (a_{i,j})$ et en développant le déterminant selon la i ème ligne
$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}$ avec $A_{i,j}$ cofacteur d'indice (i,j). On en déduit que $D_{(i,j)}\det_A = A_{i,j}$ puis. Les applications $A \mapsto A_{i,j}$ sont continues car polynomiales donc $A \mapsto \det A$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$\mathrm{d}(\det)(A) : H \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}h_{i,j} = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(A)H))$.

Exercice 7 : [énoncé]
$(I_n + H)(I_n - H) = I_n + o(H)$ donc $(I_n+H)^{-1} = I_n - H + o(\|H\|)$ d'où
$\mathrm{d}(M \mapsto M^{-1})(I) : H \mapsto -H$.
$(M+H)^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} = M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + o(\|H\|)$ donc
$\mathrm{d}(M \mapsto M^{-1})(M) : H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$.

Exercice 8 : [énoncé]
Posons $f(P) = \int_0^1 P(t)^2\,\mathrm{d}t$. $f(P+H) = f(P) + 2\int_0^1 P(t)H(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 H(t)^2\,\mathrm{d}t$.
Posons $\ell(H) = 2\int_0^1 P(t)H(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui définit ℓ forme linéaire sur E.
En munissant E de la norme $\|\,.\,\| = \|\,.\,\|_\infty$, on observe
$\left|\int_0^1 H(t)^2\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|H\|_\infty^2 = o(\|H\|)$.
Ainsi, la relation précédente donne $f(P+H) = f(P) + \ell(H) + o(\|H\|)$ ce qui assure que f est différentiable en P et $\mathrm{d}f(P) : H \mapsto 2\int_0^1 P(t)H(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 : [énoncé]
Remarquons

$$f(0) = f(0.0) = 0.f(0) = 0$$

et notons $\ell = \mathrm{d}f(0)$.
D'une part
$$f(\lambda x) = f(0) + \ell(\lambda x) + o(\lambda \|x\|)$$
et d'autre part
$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$
On en déduit
$$\lambda \ell(x) + o(\lambda \|x\|) = \lambda f(x)$$
En simplifiant par λ et en faisant $\lambda \to 0^+$, on obtient $f(x) = \ell(x)$.
Ainsi l'application f est linéaire.

Exercice 10 : [énoncé]
a) Pour $a, h \in E$,
$$f(a+h) - f(a) = (u(a) \mid h) + (u(h) \mid a) + (u(h) \mid h) = \ell(h) + o(\|h\|)$$
avec $\ell(h) = 2(u(a) \mid h)$ définissant une application linéaire et $(u(h) \mid h) = o(\|h\|)$ car $|(u(h) \mid h)| \leqslant \|u\| \|h\|^2$. Ainsi f est différentiable en tout $a \in E$ et
$$\mathrm{d}f(a) : h \mapsto 2(u(a) \mid h)$$
b) F est différentiable en tant que rapport défini de fonctions différentiables.
La formule
$$\mathrm{d}\,(f/g) = (g\,\mathrm{d}f - f\,\mathrm{d}g)/g^2$$
donne
$$\mathrm{d}F(a) : h \mapsto 2\frac{(u(a) \mid h)}{(a \mid a)} - 2\frac{(u(a) \mid a)(a \mid h)}{(a \mid a)^2} = 2\,(v(a) \mid h)$$
avec
$$v(a) = \frac{u(a)}{\|a\|^2} - \frac{(u(a) \mid a)}{\|a\|^2}a$$
Si $\mathrm{d}F(a) = 0$ alors $v(a) = 0$ et donc $u(a)$ est colinéaire à a.
La réciproque est aussi vraie.

Exercice 11 : [énoncé]
a) En polaires, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $f_p(x,y) = (\cos\theta + \sin\theta)^p r^p \sin\frac{1}{r}$.
Si $p > 0$ alors $f_p(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ et on peut prolonger f par continuité en $(0,0)$.
Si $p = 0$ alors $f_0(x,y) = \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ diverge car le sinus diverge en $+\infty$.
b) On suppose $p \geqslant 1$.
Pour $p = 2$: $f_2(x,y) = (x+y)^2 \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = O(\|(x,y)\|^2)$ ce qui s'apparente à un développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$.
La fonction f_2 est donc différentiable en $(0,0)$ de différentielle nulle.
Pour $p > 2$: $f_p(x,y) = (x+y)^{p-2} f_2(x,y)$. La fonction f_p est différentiable par produit de fonctions différentiables.
Pour $p = 1$: Quand $h \to 0^+$, $\frac{1}{h}\left(f_1(h,0) - f_1(0,0)\right) = \sin\frac{1}{h}$ diverge.
Ainsi f n'est pas dérivable en $(0,0)$ selon le vecteur $(1,0)$, elle ne peut donc y être différentiable.

Exercice 12 : [énoncé]
Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ définie par
$$\varphi(t) = f\left(a + t(b-a)\right)$$
La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est donnée par
$$\varphi'(t) = \mathrm{d}f\left(a + t(b-a)\right).(b-a)$$
Puisque $f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0)$, on a
$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f\left(a + t(b-a)\right).(b-a)\,\mathrm{d}t$$
et donc
$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \int_0^1 \|\mathrm{d}f\left(a + t(b-a)\right).(b-a)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \|b-a\|$$
car la différentielle de f en tout point est orthogonale.
Puis après ?

Exercice 13 : [énoncé]
Cas $\mathrm{d}\varphi(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$:
Considérons l'application $\psi : x \mapsto \varphi(x) - x$.
ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}\psi(0) = \tilde{0}$, il existe donc une boule B centrée en 0 telle que
$$\forall x \in B, \|\,\mathrm{d}\psi(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$$
Par l'inégalité des accroissements finis, on a alors
$$\forall x, y \in B, \|\psi(y) - \psi(x)\| \leqslant \frac{1}{2}\|y - x\|$$

Pour $x, y \in B$, si $\varphi(x) = \varphi(y)$ alors $\psi(y) - \psi(x) = y - x$ et la relation précédente donne

$$\|y - x\| \leqslant \frac{1}{2}\|y - x\|$$

d'où l'on tire $y = x$.
Cas général :
Considérons l'application $\theta = (\mathrm{d}\varphi)^{-1}(0) \circ \varphi$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition.
Pour celle-ci

$$\mathrm{d}\theta(0) = (\mathrm{d}\varphi^{-1})(0) \circ \mathrm{d}\varphi(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$$

Par l'étude précédente, il existe V voisinage de 0 tel que la restriction de θ au départ de V soit injective et alors, par un argument de composition, la restriction de φ au départ de ce même voisinage V est aussi injective.

Exercice 14 : [énoncé]
a) Quand $(x, y) \to (0, 0)$, on peut écrire $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$.
On a alors

$$f(x, y) = 2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\ln r \to 0$$

car $r^2 \ln r \to 0$
On prolonge f par continuité en $(0, 0)$ en posant $f(0, 0) = 0$.
b) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ par opérations. On observe $f(x, y) = -f(y, x)$ donc en dérivant cette relation en la variable x on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$$

c) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(t, 0) - f(0, 0)\right) = 0$$

et de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
Pour $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

Quand $(x, y) \to (0, 0)$, on peut écrire $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4r\ln r + 2r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \to 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$ et par le résultat de b), on obtient le même résultat pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 15 : [énoncé]
a) Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_{x,y} \in \left]0, x^2 + y^2\right[$ tel que $F(x, y) = f'(c)$.
Quand $(x, y) \to (0, 0)$ alors $c_{x,y} \to 0$ puis $F(x, y) \to f'(0)$.
b) Par Taylor-Young :

$$F(x, y) = F(0, 0) + \frac{x^2 + y^2}{2}f''(0) + (x^2 + y^2)\varepsilon(x^2 + y^2) = F(0, 0) + \varphi(x, y) + o(x, y)$$

avec $\varphi = 0$.
Donc F est différentiable en $(0, 0)$ et $\mathrm{d}F(0, 0) = 0$.
c) F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par opérations.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}\left(f'(x^2 + y^2) - F(x, y)\right) = x(f''(0) + o(1)) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

et de même

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

donc F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 16 : [énoncé]
a) On pose $\varphi(a, a) = -\sin a$ et on observe que $\varphi(x, y) \to \varphi(a, a)$ quand $(x, y) \to (a, a)$ avec $x \neq y$ et avec $x = y$.
b) En vertu de

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p - q}{2}\right)\sin\left(\frac{p + q}{2}\right)$$

on a

$$\varphi(x, y) = -\operatorname{sinc}\left(\frac{x - y}{2}\right)\sin\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

avec sinc de classe $\mathcal{C}^\infty$ car développable en série entière.

Exercice 17 : [énoncé]
En passant en coordonnées polaires, $f(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$. On prolonge f par continuité en $(0, 0)$ en posant $f(0, 0) = 0$.
Par opérations sur les fonctions, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. De plus $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
L'étude pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ est identique puisque $f(x, y) = -f(y, x)$.

Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = -1$ alors que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.
La fonction f ne peut être de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 18 : [énoncé]
a) Puisque la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire

$$g(x) = g(y) + \int_y^x g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $t = y + u(x-y)$, on obtient

$$g(x) = g(y) + (x-y)\int_0^1 g'(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u$$

Ainsi

$$f(x,y) = \int_0^1 g'(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u$$

et cette relation vaut pour $x \neq y$ et aussi pour $x = y$.
Soit $y \in \mathbb{R}$.
L'application $\varphi : (x,u) \mapsto g'(y+u(x-y))$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et celle-ci est continue sur $\mathbb{R}\times[0,1]$.
Par intégration sur un segment, on peut affirmer que $x \mapsto \int_0^1 \varphi(x,u)\,\mathrm{d}u$ est dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^1 \varphi(x,u)\,\mathrm{d}u\right) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,u)\,\mathrm{d}u$$

Ainsi f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 ug''(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u$$

De plus, la fonction $(x,y,u) \mapsto ug''(y+u(x-y))$ est continue sur $\mathbb{R}^2\times[0,1]$ donc, par intégration sur un segment, on peut affirmer la continuité de la première dérivée partielle de f

$$(x,y) \mapsto \int_0^1 ug''(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u$$

De même, on montre que la deuxième dérivée partielle de f existe et est continue.
b) Par ce qui précède

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \int_0^1 ug''(x)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}g''(x)$$

Exercice 19 : [énoncé]
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x,y)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(y,x)) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$.

Exercice 20 : [énoncé]
a) En dérivant la relation $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ en la variable t :
$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1}f(x,y)$.
En évaluant en $t=1$, on obtient : $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$.
b) Supposons que f vérifie l'équation proposée.
Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, considérons $\varphi : t \mapsto f(tx,ty) - t^\alpha f(x,y)$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
φ est dérivable et $t\varphi'(t) = \alpha\varphi(t)$. Après résolution et puisque $\varphi(1) = 0$, on obtient $\varphi(t) = 0$ et donc f est homogène de degré α.

Exercice 21 : [énoncé]
L'application φ est bien définie car $\varphi(r)$ est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue.
Posons $g : (r,t) \mapsto f(r\cos t, r\sin t)$.
La fonction g admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial r}$ et celle-ci est continue sur $[0,2\pi]\times\mathbb{R}$.
Par intégration sur un segment, on peut appliquer la Formule de Leibniz.
Ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} \cos t\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t) + \sin t\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit $r\varphi'(r) = 0$ puis $\varphi'(r) = 0$ pour $r\neq 0$ puis pour tout r par continuité.
Par suite φ est constante égale à $\varphi(0) = 2\pi f(0)$.

Exercice 22 : [énoncé]
Par composition de fonctions $\mathcal{C}^1$, g est de classe $\mathcal{C}^1$.
$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et
$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
En combinant ces deux relations, on obtient
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Exercice 23 : [énoncé]
Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

On calcule les dérivées partielles de F

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)=\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}}f'\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x_1,\dots,x_n)=\frac{x_i^2}{x_1^2+\dots+x_n^2}f''\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)+\frac{x_1^2+\dots+\hat{x}_i^2+\dots+x_n^2}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{3/2}}f'\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)$$

On en déduit

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}=f''\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)+\frac{n-1}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}}f'\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)$$

Puisque $t=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ parcourt $\mathbb{R}^{+\star}$ quand $(x_1,\dots,x_n)$ parcourt $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, l'équation $\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}=0$ est vérifiée si, et seulement si, f est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de l'équation différentielle

$$f''(t)+\frac{(n-1)}{t}f'(t)=0$$

Après résolution on obtient

$$f(t)=\frac{\lambda}{t^{n-2}}+\mu \text{ avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R} \text{ si } n\neq 2 \text{ et } f(t)=\lambda\ln t+\mu \text{ si } n=2$$

Exercice 24 : [énoncé]
$\frac{\partial g}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$,
$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$,
$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$
donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.

Exercice 25 : [énoncé]
a) g est $\mathcal{C}^2$ par opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^2$.
D'une part : $\frac{\partial g}{\partial r}=\cos t\frac{\partial f}{\partial x}+\sin t\frac{\partial f}{\partial y}$ et
$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right)=\cos t\frac{\partial f}{\partial x}+\sin t\frac{\partial f}{\partial y}+r\cos^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2r\cos t\sin t\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+r\sin^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
D'autre part : $\frac{\partial g}{\partial t}=-r\sin t\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos t\frac{\partial f}{\partial y}$ et
$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=-r\cos t\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin t\frac{\partial f}{\partial y}+r^2\sin^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2r^2\cos t\sin t\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+r^2\cos^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
donc $r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=r^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial f^2}{\partial y^2}\right)=0$.

b) $g:(r,t)\mapsto f(r\cos t,r\sin t)$ est $\mathcal{C}^2$ donc g, $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$.
Donc φ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
$r(r\varphi'(r))'=r\varphi'(r)+r^2\varphi''(r)=\int_0^{2\pi}r\frac{\partial g}{\partial r}(r,t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)\,\mathrm{d}t=$
$-\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\partial g}{\partial t}(r,t)\right]_0^{2\pi}$.
Puisque $t\mapsto g(r,t)$ est 2π périodique, il en est de même de $t\mapsto\frac{\partial g}{\partial t}(r,t)$ et donc $r(r\varphi'(r))'=0$.
Puisque $r\mapsto(r\varphi'(r))'$ est continue et nulle sur $\mathbb{R}^\star$, cette fonction est continue nulle sur $\mathbb{R}$.
c) Par suite, il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $r\varphi'(r)=C$ puis $\varphi'(r)=\frac{C}{r}$ et $\varphi(r)=C\ln|r|+D$ sur $\mathbb{R}^\star$.
Or φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc $C=0$ et finalement φ est constante.

Exercice 26 : [énoncé]
Posons $\varphi(x,u)=\int_0^u f(x+1,t)\,\mathrm{d}t$.
La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ et l'intégration ayant lieu sur un segment, on peut affirmer que $x\mapsto\varphi(x,u)$ est dérivable et
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\varphi(x,u)\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,u)=\int_0^u\frac{\partial f}{\partial x}(x+1,t)\,\mathrm{d}t$.
D'autre part, $u\mapsto\varphi(x,u)$ est évidemment dérivable et
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\varphi(x,u)\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x,u)=f(x+1,u)$. Notons enfin que les dérivées partielles de φ sont continue en (x,u) et donc la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Puisque $F(x)=\varphi(x,x^3)-\varphi(x,2x)$, F est de classe $\mathcal{C}^1$.
Par dérivation de fonction composée de classe $\mathcal{C}^1$:
$F'(x)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,x^3)+3x^2\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x,x^3)-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,x^2)-2\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x,2x)$.
Enfin $F'(x)=\int_{2x}^{x^3}\frac{\partial f}{\partial x}(x+1,t)\,\mathrm{d}t+3x^2f(x+1,x^3)-2f(x+1,2x)$

Exercice 27 : [énoncé]
Supposons f homogène de degré p i.e.

$$\forall t>0, f(tx_1,\dots,tx_n)=t^pf(x_1,\dots,x_n)$$

En dérivant cette relation par rapport à t et en évaluant en $t=1$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)=pf(x_1,\dots,x_n)$$

Inversement, cette relation donne $t\mapsto g(t)$ est solution de l'équation différentielle $tg'(t)=pg(t)$ donc f homogène de degré p.
Notons que pour $n=1$, $f(x)=|x|^3$ vérifie la relation et n'est homogène de degré 3 que dans le sens préciser initialement.

Exercice 28 : [énoncé]

Par dérivation de fonction composée : $g'(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n)$.

Exercice 29 : [énoncé]

Les deux applications sont de classe $\mathcal{C}^1$

a) On obtient r.

b) On obtient $r^2 \sin\theta$.

Exercice 30 : [énoncé]

Notons $f_1, \dots, f_n$ les fonctions composantes de f et $\mathrm{D}_1, \dots, \mathrm{D}_n$ les opérateurs de dérivées partielles.

L'antisymétrie de la matrice jacobienne de f donne

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \mathrm{D}_i(f_j) = -\mathrm{D}_j(f_i)$$

Exploitons cette propriété pour établir que les dérivées partielles de f sont constantes

Soient $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$. Par antisymétrie

$$\mathrm{D}_k(\mathrm{D}_j f_i) = -\mathrm{D}_k(\mathrm{D}_i f_j)$$

Par le théorème de Schwarz, puis par antisymétrie

$$\mathrm{D}_k(\mathrm{D}_j f_i) = -\mathrm{D}_i(\mathrm{D}_k f_j) = \mathrm{D}_i(\mathrm{D}_j f_k)$$

A nouveau par le théorème de Schwarz et par antisymétrie

$$\mathrm{D}_k(\mathrm{D}_j f_i) = \mathrm{D}_j(\mathrm{D}_i f_k) = -\mathrm{D}_j(\mathrm{D}_k f_i)$$

Enfin, en vertu du théorème de Schwarz, on obtient

$$\mathrm{D}_k(\mathrm{D}_j f_i) = 0$$

Ainsi toutes les dérivées partielles de $\mathrm{D}_j f_i$ sont nulles et donc $\mathrm{D}_j f_i$ est constante.

En posant $a_{i,j}$ la valeur de cette constante, on obtient

$$\mathrm{Jac}(f) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n} = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ antisymétrique}$$

Enfin en intégrant, on obtient

$$f(x) = Ax + b \text{ avec } b = f(0)$$

Exercice 31 : [énoncé]

L'application $\varphi : (u, v) \mapsto (u + v, uv)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de U vers $\mathbb{R}^2$.

Soit $(s, p) \in \mathbb{R}^2$

Si $(s, p) = \varphi(u, v)$ alors u et v sont les deux racines de $x^2 - sx + p = 0$ et donc $\Delta = s^2 - 4p > 0$.

Les valeurs prises par φ appartiennent à

$$V = \left\{(s, p) \in \mathbb{R}^2 / s^2 - 4p > 0\right\}$$

De plus, pour $(s, p) \in V$, il existe un unique couple (u, v) tel que $u < v$ et $\varphi(u, v) = (s, p)$, c'est le couple formé des deux racines de l'équation $x^2 - sx + p = 0$

$$u = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \text{ et } v = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

Ainsi φ réalise une bijection de U sur V.

On vérifie aisément que U et V sont des ouverts (par image réciproque d'ouverts par des applications continues pertinemment construites) et que φ ainsi que φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 32 : [énoncé]

L'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Le jacobien de φ en (x, y) est $1 - \frac{1}{4} \sin x \sin y$: il ne s'annule pas.

Pour conclure, il ne reste plus qu'à observer que φ est bijective.

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow \begin{cases} u = x + \dfrac{1}{2}\cos(y) \\ v = y + \dfrac{1}{2}\cos(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}\cos\left(v - \dfrac{1}{2}\cos(x)\right) = u \\ y = v - \dfrac{1}{2}\cos(x) \end{cases}.$$

Considérons $f_v : x \mapsto x + \frac{1}{2}\cos\left(v - \frac{1}{2}\cos(x)\right)$.

Une étude fonctionnelle montre que f_v réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Ainsi $\varphi(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow \begin{cases} x = f_v^{-1}(u) \\ y = v - \dfrac{1}{2}\cos(f_v^{-1}(u)) \end{cases}$ ce qui donne la bijectivité de φ.

Exercice 33 : [énoncé]

φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} y + f(x) = a \\ x + f(y) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + f(b - f(y)) = a \\ x = b - f(y) \end{cases}$$

Considérons
$$\varphi_b : y \mapsto y + f(b - f(y))$$
φ est continue dérivable et $\varphi_b'(y) = 1 - f'(y)f'(b - f(y))$ donc $\varphi_b'(y) > 0$ car $|f'(y)f'(b - f(y))| \leqslant k^2 < 1$. Par conséquent φ est strictement croissante. De plus f étant k lipschitzienne : $|f(t) - f(0)| \leqslant k\,|t|$ donc $|f(t)| \leqslant k\,|t| + |f(0)|$ puis $|f(b - f(y))| \leqslant k\,|b - f(y)| + |f(0)| \leqslant k^2\,|y| + \ell$ par suite

$$\varphi_b(y) \geqslant (1 - k^2)y - \ell \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty \text{ et } \varphi_b(y) \leqslant (1 - k^2)y + \ell \xrightarrow[y\to-\infty]{} -\infty$$

donc φ_b réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Par conséquent :

$$\varphi(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varphi_b^{-1}(a) \\ x = b - \varphi_b^{-1}(a) \end{cases}$$

Finalement, l'application φ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$. De plus

$$\mathrm{Jac}\varphi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} f'(x) & 1 \\ 1 & f'(y) \end{pmatrix}$$

et $\det(\mathrm{Jac}\varphi_{(x,y)}) = f'(x)f'(y) - 1 \neq$ car $|f'(x)f'(y)| \leqslant k^2 < 1$ donc φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Exercice 34 : [énoncé]
a) Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ puisque
$$N(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \text{ avec } x_1^2 + \cdots + x_n^2 \neq 0$$
Sachant
$$\frac{\partial N}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{N(x)}$$
la différentielle de N en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et

$$\mathrm{d}N(x) : h \mapsto \frac{1}{\|x\|}\sum_{i=1}^{b} \frac{\partial N}{\partial x_i}(x)h_i = \frac{(x \mid h)}{\|x\|}$$

b) Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Quand $h \to 0$
$$F(x + h) = f\left(\|x + h\|\right)(x + h)$$
Or
$$f\left(\|x + h\|\right) = f\left(\|x\| + \frac{(x \mid h)}{\|x\|} + o\left(\|h\|\right)\right) = f(\|x\|) + f'\left(\|x\|\right)\frac{(x \mid h)}{\|x\|} + o\left(\|h\|\right)$$

puis
$$F(x + h) = F(x) + f'\left(\|x\|\right)\frac{(x \mid h)}{\|x\|}x + f\left(\|x\|\right)h + o\left(\|h\|\right)$$
On en déduit que F est différentielle en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et

$$\mathrm{d}F(x) : h \mapsto f'\left(\|x\|\right)\frac{(x \mid h)}{\|x\|}x + f\left(\|x\|\right)h$$

Pour $x = 0$

$$F(h) = f\left(\|h\|\right)h = \left(f(0) + \|h\|\, f'(0) + o\left(\|h\|\right)\right)h = h + o\left(\|h\|\right)$$

donc F est différentiable en 0 et

$$\mathrm{d}F(0) : h \mapsto h$$

On peut alors calculer les dérivées partielles de F dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$:

$$\mathrm{D}_iF(x) = \begin{cases} f'\left(\|x\|\right)\frac{x_i}{\|x\|} + f\left(\|x\|\right)e_i & \text{si } x \neq 0 \\ e_i & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Par la continuité de f' en 0 avec $f'(0) = 0$, on observe la continuité des dérivées partielles D_iF sur $\mathbb{R}^n$ et on peut affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
c) Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$(\mathrm{d}F(x)(h) \mid h) = f'\left(\|x\|\right)\frac{(x \mid h)^2}{\|x\|} + f\left(\|x\|\right)\|h\|^2 \geqslant f\left(\|x\|\right)\|h\|^2$$

car $f' \geqslant 0$ puisque f est supposée croissante.
Pour $x = 0$, l'inégalité est vraie puisqu'il y a même égalité.
d) En tout point $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(\mathrm{d}F(x)(h) \mid h) \geqslant f(0)\,\|h\|^2 \geqslant \|h\|^2$$

On en déduit
$$\mathrm{d}F(x)(h) = 0 \Rightarrow h = 0$$

Ainsi $\mathrm{d}F(x)$ est inversible et donc le jacobien de F ne s'annule pas.
Montrons que F est injective.
Si $F(x) = F(x')$ alors $f(\|x\|)x = f(\|x'\|)x'$ et donc les vecteurs x et x' sont positivement liés. En passant en norme, on a $f\left(\|x\|\right)\|x\| = f\left(\|x'\|\right)\|x'\|$. Or l'application $t \mapsto tf(t)$ est strictement croissante car

$$(tf(t))' = f(t) + tf'(t) \geqslant f(0) \geqslant 1$$

On en déduit $\|x\| = \|x'\|$ puis $x = x'$.
Montrons que F est surjective.
Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Considérons l'application $\varphi : [0,1] \to \|F(t.y)\|$.
φ est continue, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = f(\|y\|)\|y\| \geqslant \|y\|$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in [0,1]$ tel que $\varphi(t) = \|y\|$ et alors $F(t.y) = y$ car $F(t.y) = \alpha y$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $\|F(t.y)\| = \|y\|$.
Ainsi l'application F est surjective.
Finalement F est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même dont le jacobien ne s'annule pas, c'est donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers lui-même.

Exercice 35 : [énoncé]
Pour $y \in \left]-R, R\right[$ fixé, on peut appliquer le théorème dérivation sous le signe somme à l'application $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+iy)^n$ sur les compacts inclus dans $\left]-r, r\right[$ avec $r = \sqrt{R^2 - y^2}$. On obtient alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x+iy)^{n-1}$. De même
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x+iy)^{n-2}$ et aussi
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \sum_{n=2}^{+\infty} -n(n-1)a_n(x+iy)^{n-2}$ d'où la conclusion.

Exercice 36 : [énoncé]
a) Cas $|x| < 1$: $|u_n(x,y)| = o(x^n)$ donc $\sum u_n(x,y)$ est absolument convergente.
Cas $|x| > 1$: si la série $\sum u_n(x,y)$ converge alors $u_n(x,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc
$\cos(ny) = u_n(x,y)\frac{\sqrt{n}}{x^n} \to 0$ par croissance comparée.
Mézalor $\cos(2ny) = 2\cos^2(ny) - 1 \to -1$ ce qui est incohérent.
Ainsi la série $\sum u_n(x,y)$ diverge.
Cas $x = 1$:
Si $y = 0 \quad [2\pi]$ alors $u_n(1,y) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum u_n(1,y)$ diverge.
Si $y \neq 0 \quad [2\pi]$ alors par une transformation d'Abel, on obtient $\sum u_n(1,y)$ converge.
Cas $x = -1$:
On remarque $u_n(-1,y) = u_n(1, y+\pi)$.
Ainsi $\sum u_n(-1,y)$ converge si, et seulement si, $y \neq \pi \quad [2\pi]$.
b) $D^\circ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < 1\right\}$.
Soit $a \in [0,1[$ et $D_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < a\right\}$.
u_n est $\mathcal{C}^1$ sur D_a, $\sum u_n(x,y)$ converge simplement sur D_a, $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)$ converge normalement sur D_a via $\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \sqrt{n}a^{n-1}$ et enfin $\sum \frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)$ converge normalement sur D_a via $\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \sqrt{n}a^n$. On peut alors appliquer les théorèmes usuels qui affirment que $(x,y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x,y)$ admet deux dérivées partielles continues sur D_a, c'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_a puis sur D car ce qui précède vaut pour tout $a \in [0,1[$.

Exercice 37 : [énoncé]
a) Si $|y| \leqslant 1$ alors la série définissant $f(x,y)$ converge si, et seulement si, $|x| < 1$
Si $|y| > 1$ alors la série définissant $f(x,y)$ converge si, et seulement si, $|x| < \left|y^2\right|$ car $\frac{x^n}{1+y^{2n}} \sim \left(\frac{x}{y^2}\right)^n$.
Finalement $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < \max(1, y^2)\right\}$.
b) $u_n(x,y) = \frac{x^n}{1+y^{2n}}$. Soit $a \in [0,1[$ et $D_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leqslant a\max(1,y^2)\right\}$.
Pour $(x,y) \in D_a$:
$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}\right|$
Si $|y| \leqslant 1$ alors $|x| \leqslant a$ et $\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}\right| \leqslant \frac{na^{n-1}}{1+y^{2n}} \leqslant na^{n-1}$.
Si $|y| > 1$ alors $|x| \leqslant ay^2$ et $\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}\right| \leqslant \frac{na^{n-1}y^{2n-2}}{1+y^{2n}} \leqslant \frac{na^{n-1}}{y^2} \leqslant na^{n-1}$
Dans les deux cas $\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant na^{n-1}$ qui est le terme général d'une série convergente.
$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\frac{2ny^{2n-1}x^n}{(1+y^{2n})^2}\right| \leqslant \frac{2nx^n}{1+y^{2n}}$ car $\frac{y^{2n-1}}{1+y^{2n}} \leqslant 1$.
Si $|y| \leqslant 1$ alors $|x| \leqslant a$ et $\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \frac{2na^n}{1+y^{2n}} \leqslant 2na^n$.
Si $|y| > 1$ alors $|x| \leqslant ay^2$ et $\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \frac{2na^ny^{2n}}{1+y^{2n}} \leqslant 2na^n$.
Dans les deux cas $\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 2na^n$ qui est le terme général d'une série convergente.
Par convergence normale, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur D_a et comme ceci vaut pour tout $a \in [0,1[$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur D.

Exercice 38 : [énoncé]

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = v - u \\ y = 3u - 2v \end{cases}$$

Posons $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(u,v) = (v-u, 3u-2v)$$

ϕ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ (et même un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme)
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par « $g(u,v) = f(x,y)$ »i.e. $g(u,v) = f(v-u, 3u-2v)$
$g = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

f est solution de l'équation si, et seulement si, $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$ soit $g(u,v) = \varphi(v)$ avec φ fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Les solutions de l'équation aux dérivées partielles sont $f(x,y) = \varphi(3x+y)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 39 : [énoncé]

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (u+v)/2 \\ y = (u-v)/2 \end{cases}$$

Posons $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\phi(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

ϕ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = f((u+v)/2, (u-v)/2)$.
Par composition $g = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)_{(x,y)=\phi(u,v)}$$

Par suite f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si, g est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$2\frac{\partial g}{\partial u} = g$$

Après résolution, on obtient $g(u,v) = C(v)\mathrm{e}^{u/2}$ avec C fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$ puis

$$f(x,y) = C(x-y)\mathrm{e}^{(x+y)/2}$$

Exercice 40 : [énoncé]
Soient $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^{+\star} \times]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Par composition g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star} \times]-\pi/2, \pi/2[$ et

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si, $r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$ ce qui conduit à $g(r,\theta) = h(\theta)$ puis $f(x,y) = h\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \tilde{h}\left(\frac{y}{x}\right)$ avec $\tilde{h}$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41 : [énoncé]
Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+\star}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ solution de

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Soit $g : \mathbb{R}^{+\star} \times]0, \pi[\to \mathbb{R}$ l'application définie par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Par composition g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star} \times]0, \pi[$ et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = -y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$$

Pour $r \in \mathbb{R}^{+\star}$ fixé, $\theta \mapsto g(r,\theta)$ est solution de l'équation différentielle $y'(\theta) = -y(\theta)$.
Après résolution il existe $C(r) \in \mathbb{R}$ tel que $g(r,\theta) = C(r)\mathrm{e}^{-\theta}$
De plus, la fonction $r \mapsto C(r) = g(r,0)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Ainsi

$$f(x,y) = C(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{e}^{\arctan(x/y) - \pi/2} = h(x^2+y^2)\mathrm{e}^{\arctan(x/y)}$$

où h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Inversement de telles fonctions sont bien solutions.

Exercice 42 : [énoncé]
a) On passe en coordonnées polaires avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan(x/y)$ de sorte que $x = r\sin\theta$ et $y = r\cos\theta$.
On parvient à

$$f(x,y) = C(x/y)(x^2+y^2)^{\alpha/2}$$

avec C une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

b) Idem, on parvient à

$$f(x,y) = \frac{2}{3}\frac{x}{y}\sqrt{x^3+y^3} + C\,(x/y)$$

avec C une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 43 : [énoncé]

a) L'application ϕ est clairement un endomorphisme de E.
Posons $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan\frac{y}{x}$,
$(r,\theta) \in V = \mathbb{R}^{+\star} \times \left]-\pi/2, \pi/2\right[$
Pour $f \in E$, on considère $g \in \mathcal{C}^\infty(V,\mathbb{R})$ définie par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
On remarque

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Ainsi

$$\Phi(f) = 0 \Leftrightarrow r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$$

pour tout $(r,\theta) \in V$.
La résolution de cette équation aux dérivées partielles donne $g(r,\theta) = C(\theta)$ avec C de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$.
Par suite on obtient la solution générale $f(x,y) = C(\arctan(y/x)) = D(y/x)$ avec D fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
b) Si f est homogène de degré α alors en dérivant la relation $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ par rapport à t puis en évaluant le résultat en $t = 1$ on obtient l'égalité $\Phi(f) = \alpha f$.
Inversement si $\Phi(f) = \alpha f$ alors en introduisant g comme ci-dessus, on obtient

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \alpha g(r,\theta)$$

ce qui donne $g(r,\theta) = C(\theta)r^\alpha$ puis

$$f(x,y) = D(y/x)(x^2+y^2)^{\alpha/2}$$

avec D fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il est alors facile de vérifier que f est homogène de degré α.
c) La fonction h est homogène de degré 5, donc $h/5$ est solution particulière de l'équation linéaire $\Phi(f) = h$. L'ensemble des solutions de l'équation est alors le sous-espace affine $h/5 + \ker\Phi$.

Exercice 44 : [énoncé]

$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ $\begin{cases} x = (u+v)/2 \\ y = (u-v)/2 \end{cases}$
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = f((u+v)/2, (u-v)/2)$. g est de classe $\mathcal{C}^2$.
f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,

$$\frac{\partial g}{\partial u\partial v}(u,v) = 0$$

soit $g(u,v) = C(u) + D(v)$ avec C, D fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
Ainsi les solutions sont $f(x,y) = C(x+y) + D(x-y)$.

Exercice 45 : [énoncé]

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = f(u, v-u)$. Par composition g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u,v-u) - \frac{\partial f}{\partial y}(u,v-u)$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,v-u) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u,v-u) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,v-u)$$

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = 0$$

soit $g(u,v) = uC(v) + D(v)$ puis $f(x,y) = xC(x+y) + D(x+y)$ avec C, D fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 46 : [énoncé]

Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ solution de $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.
Soit $g : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $g(u,v) = f(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})$.
Par composition g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$ et
$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}}\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{4v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{4\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{4v\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2u}\frac{\partial g}{\partial v}$.
Pour $v \in \mathbb{R}^{+\star}$ fixé, $u \mapsto \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ est solution de l'équation différentielle $2u.y'(u) = y(u)$.
Par suite il existe $C(v) \in \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = C(v)\sqrt{u}$$

De plus la fonction $v \mapsto C(v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si G désigne une primitive de celle-ci :
$g(u,v) = G(v)\sqrt{u} + H(u)$ où H est une fonction dont le caractère $\mathcal{C}^2$ n'échappe à personne.
Finalement

$$f(x,y) = G(x/y)\sqrt{xy} + H(xy)$$

où G et H sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
Inversement de telles fonctions sont bien solutions.

Exercice 47 : [énoncé]
Points critiques $(0,0)$ et $(1,1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

En (0,0) : $r = 0, s = -3, t = 0$, pas d'extremum local.
En $(1,1)$: $r = 6, s = -3, t = 6$, minimum local. Ce n'est pas un minimum global par considération la limite de $f(t,0)$ quant $t \to -\infty$.

Exercice 48 : [énoncé]
Points critiques $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$$

En (0,0) : $r = 0, s = -4, t = 0$, pas d'extremum local.
En $(1,1)$: $r = 12, s = -4, t = 12$, minimum local.
En $(-1,-1)$: $f(x,y) = f(-x,-y)$, même conclusion qu'en $(1,1)$.
Puisque

$$f(x,y) - f(1,1) = (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + 2(x-y)^2 \geqslant 0$$

On peut conclure que $(1,1)$ et $(-1,-1)$ sont minimum globaux.

Exercice 49 : [énoncé]
f est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+\star}$.
Points critiques $(0,1)$ et $(0,\mathrm{e}^{-2})$.
En $(0,1)$: $f(0,1) = 0$.
Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, f(x,y) \geqslant 0$$

$(0,1)$ est un minimum global.
En $(0,\mathrm{e}^{-2})$: $rt - s^2 = -4$.
Ce n'est pas un extremum local.

Exercice 50 : [énoncé]
$(-2,2)$ seul point critique.
En posant $x = -2 + u$ et $y = 2 + v$, puis $u = r\cos\theta$ et $v = r\sin\theta$

$$f(x,y) - f(-2,2) = u^2 + uv + v^2 = r^2(1 + \cos\theta\sin\theta) \geqslant 0$$

Il y a un minimum global en $(-2,2)$.

Exercice 51 : [énoncé]
La fonction $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
Après résolution ses points critiques sont : $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.
En $(0,0)$: $f(0,0) = 0$, $f(1/n,0) \sim -2/n^2 < 0$ et $f(1/n,1/n) \sim 2/n^4 > 0$.
Pas d'extremum local en $(0,0)$
En $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$: $r = 20$, $t = 20$ et $s = 4$. $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$.
Il y a un minimum local en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

$$f(\sqrt{2}+u,-\sqrt{2}+v) = -8 + 10(u^2+v^2) + 4uv + 4\sqrt{2}(u^3-v^3) + u^4 + v^4$$

On exploite

$$2(u^2+v^2) + 4uv = 2(u+v)^2 \text{ et } 8u^2 + 4\sqrt{2}u^3 + u^4 = u^2(u+2\sqrt{2})^2$$

pour affirmer

$$f(\sqrt{2}+u,-\sqrt{2}+v) = f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) + 2(u+v)^2 + u^2(u+2\sqrt{2})^2 + v^2(v+2\sqrt{2})^2$$

Ainsi $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ est un minimum global.
En $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$: l'étude est identique puisque $f(x,y) = f(y,x)$.

Exercice 52 : [énoncé]
L'étude des points critiques donne $(1,1)$ seul point critique.
La fonction $t \mapsto t^{\ln t}$ admet un minimum en 1, donc $(x,y) \mapsto x^{\ln x} + y^{\ln y}$ admet un minimum en $(1,1)$.

Exercice 53 : [énoncé]
On définit la fonction

```
f:=(x,y)->x*exp(y)+y*exp(x);
```

On recherche les points critiques :

```
solve({D[1](f)(x,y)=0,D[2](f)(x,y)=0},{x,y});
```

La réponse fournie par Maple, s'exprime à l'aide de

```
RootOf
```

. On concrétise celle-ci par

```
allvalues(%);
```

On obtient un seul point critique $(-1,-1)$.
On peut confirmer le résultat précédent en introduisant

```
g:=t->t*exp(1/t)+exp(t);
```

Cette fonction est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée obtenue par

```
diff(g(t),t);
```

assure que g est strictement croissante sur $]-\infty,0[$.
Cela permet d'affirmer que le

```
RootOf
```

précédent ne conduit qu'à la valeur -1.
On étudie le point critique en posant

```
r:=D[1,1](f)(-1,-1);s:=D[1,2](f)(-1,-1);t:=D[2,2](f)(-1,-1);
```

et en calculant

```
r*t-s^2;
```

La valeur obtenue est strictement négative, il n'y a pas d'extremum en $(-1,-1)$.
On peut confirmer ce résultat en par la représentation

```
plot3d(f(x,y),x=-2..0,y=-2..0);
```

Exercice 54 : [énoncé]
Soit $f(x,y)=xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ définie sur $(\mathbb{R}^{+\star})^2$.
Soit $x>0$ fixé.
L'application $y\mapsto f(x,y)$ a pour dérivée $-\frac{1}{y^2}+x$, elle donc minimale pour $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.
Considérons $g:x\mapsto f(x,\frac{1}{\sqrt{x}})=\frac{1}{x}+2\sqrt{x}$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2}$.
g est minimale pour $x=1$, puis f est minimale en $(1,1)$ avec $f(1,1)=3$.

Exercice 55 : [énoncé]
L'étude des points critiques donne $(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a})$ seul point critique.
Posons $\alpha=\sqrt[3]{a}$.

$$f(x,y)-f(\alpha,\alpha)=x+y+\frac{\alpha^3}{xy}-3\alpha=\frac{x^2y+xy^2+\alpha^3-3\alpha xy}{xy}$$

Etudions $\varphi:\alpha\mapsto x^2y+xy^2+\alpha^3-3\alpha xy$. Cette application admet un minimum en $\sqrt{xy}$ de valeur

$$x^2y+xy^2-2xy\sqrt{xy}=xy(x+y-2\sqrt{xy})=xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geqslant 0$$

donc pour tout $x,y>0$,

$$f(x,y)\geqslant f(\alpha,\alpha)$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ et $\alpha=\sqrt{xy}$ i.e. $x=y=\alpha$.

Exercice 56 : [énoncé]
Soit $x>0$ fixé.
L'application $y\mapsto f(x,y)$ a pour dérivée $2y-\frac{a}{xy^2}$, elle donc minimale pour $y=\sqrt[3]{\frac{a}{2x}}$.
Considérons

$$g:x\mapsto f(x,\sqrt[3]{\frac{a}{2x}})=x^2+\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2a^2}{x^2}}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $g'(x)=2x-\frac{\sqrt[3]{2a^2}}{x^{5/3}}$,
$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x^{8/3}=2^{1/3}a^{2/3}\Leftrightarrow x=\sqrt[4]{\frac{a}{2}}$.
g est minimale pour $x=\sqrt[4]{a/2}$, puis f admet un minimum en $(\sqrt[4]{a/2},\sqrt[4]{a/2})$ de valeur $2\sqrt{2a}$.

Exercice 57 : [énoncé]
Soit a point critique de f.
Pour tout $b \in U$, on a par convexité de f :
$\forall \lambda \in [0,1],\ f((1-\lambda)a + \lambda b) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$.
Par suite $\frac{1}{\lambda}\left(f(a+\lambda(b-a)) - f(a)\right) \leqslant f(b) - f(a)$.
En passant à la limite quand $\lambda \to 0^+,\ \mathrm{d}f(a).(b-a) \leqslant f(b) - f(a)$.
Or $\mathrm{d}f(a) = 0$ donc $f(b) \geqslant f(a)$.

Exercice 58 : [énoncé]
Posons
$$f(x,y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$
définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[^2$
Soit $x > 0$ fixé. Posons
$$\varphi : y \to f(x,y)$$
On a
$$\varphi'(y) = \frac{x(x-y^2)}{(1+x)(1+y)^2(x+y)^2}$$
La fonction φ admet donc un maximum en $y = \sqrt{x}$ dont la valeur est
$$\psi(x) = f(x,\sqrt{x}) = \frac{x}{(1+x)(1+\sqrt{x})^2}$$
On a
$$\psi'(x) = \frac{x\sqrt{x}-1}{(1+x)^2(1+\sqrt{x})^3}$$
La fonction ψ admet donc un maximum en $x = 1$ dont la valeur est
$$\psi(1) = f(1,1) = \frac{1}{8}$$
Au final
$$\sup_{(x,y)\in]0,+\infty[^2} \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} = \max_{(x,y)\in]0,+\infty[^2} \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} = \frac{1}{8}$$

Exercice 59 : [énoncé]
a) f est polynomiale donc continue. T est compact donc f présente un maximum sur T. Comme f prend des valeurs strictement positives et des valeurs nulles sur le bord de T, f présente son maximum à l'intérieur de T.
b) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U = T^\circ$ donc le maximum de f est point critique.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1-2x-y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x(1-x-2y)$$
Après résolution, on obtient que seul le couple $(1/3,1/3)$ est point critique de f et on a
$$f(1/3,1/3) = \frac{1}{27}$$

Exercice 60 : [énoncé]
a) $\mathcal{D}$ est fermée et bornée donc compacte.
b) Pour $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto t^\alpha = \begin{cases} \mathrm{e}^{\alpha \ln t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0,1]$ donc f est continue par composition.
c) Puisque f est continue sur un compact il y admet un maximum.
Puisque f est positive et non nulle ce maximum est à valeur strictement positive.
Or f est nulle sur le bord de $\mathcal{D}$ donc ce maximum est dans l'ouvert
$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x,y > 0 \text{ et } x+y < 1\right\}$ et c'est donc un point critique de f car f est $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^{a-1}y^b(1-x-y)^{c-1}\left(a(1-x-y) - cx\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^a y^{b-1}(1-x-y)^{c-1}\left(b(1\right.$$
Il n'y a qu'un seul point critique c'est :
$$\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}\right)$$
Finalement
$$\sup_{(x,y)\in\mathcal{D}} f(x,y) = \left(a^a b^b c^c\right)^{\frac{1}{a+b+c}}$$

Exercice 61 : [énoncé]
La fonction $f : (x,y) \mapsto \sin x \sin y \sin(x+y)$ est continue sur le compact $[0,\pi/2]^2$ donc y admet un maximum.
Le seul point critique intérieur à $[0,\pi/2]^2$ est en $x = y = \pi/3$ et la valeur y est $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.
Sur le bord de $[0,\pi/2]^2$ le maximum est celui de la fonction φ avec
$$\varphi(t) = \sin t \sin\left(\pi/2 - t\right) = \sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$$

Ce maximum vaut 1/2.
Puisque

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} \geqslant \frac{1}{2}$$

on a

$$\sup_{[0,\pi/2]^2} \sin x \sin y \sin(x+y) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Exercice 62 : [énoncé]
Rappelons que toute fonction réelle définie et continue sur un compact non vide y admet un maximum. Puisque la fonction f est continue sur le compact K, on est assuré de l'existence du maximum étudié.
Notons U l'ouvert donné par

$$U = K^\circ = \left]0,1\right[^2$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1-2xy-x^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1-2xy-y^2}{(1+x^2)(1+y^2)^2}$$

Après résolution, seul le couple $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ est point critique de f dans U.
La valeur de f en ce couple est

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Sur le bord de K, les valeurs prises par f sont les valeurs prises sur $[0,1]$ par les fonctions

$$\varphi(t) = f(t,0) = f(0,t) = \frac{t}{1+t^2} \text{ et } \psi(t) = f(t,1) = f(1,t) = \frac{1+t}{2(1+t^2)}$$

D'une part

$$\varphi(t) \leqslant \frac{1}{2}$$

et d'autre part

$$\psi'(t) = \frac{x^4+2x^2-x+1}{(1+x^2)^2} \geqslant 0$$

donne que le maximum de ψ est $\psi(1) = 1/2$.
Puisque

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} > \frac{1}{2}$$

on peut affirmer que le maximum de f n'évolue pas sur le bord du compact K, il est donc forcément dans U et c'est alors un point critique de f qui ne peut qu'être le couple $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Exercice 63 : [énoncé]
On peut supposer l'un des sommets être $(1,0)$ et les deux autres repérés par des angles $0 < \alpha < \beta < 2\pi$.
Cela nous amène à considérer $f : (\alpha,\beta) \mapsto 2\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta-\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right)$ sur l'ouvert $U = \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 / 0 < \alpha < \beta < 2\pi\right\}$.
Le maximum, qui existe, est alors point critique de cette fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Cela nous amène à résoudre le système $\begin{cases} \cos\dfrac{\alpha}{2} - \cos\dfrac{\beta-\alpha}{2} = 0 \\ \cos\dfrac{\beta}{2} + \cos\dfrac{\beta-\alpha}{2} = 0 \end{cases}$.
L'équation $\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ donne $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2} \quad [2\pi]$ ou $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2} \quad [2\pi]$.
L'alternative $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2} \quad [2\pi]$ est à exclure et il reste $\beta = 2\alpha$ avec de plus $\alpha \in \left]0,\pi\right[$.
L'équation $\cos\frac{\beta}{2} = -\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ donne alors $\cos\alpha = -\cos\frac{\alpha}{2}$ d'où $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ puisque $\alpha \in \left]0,\pi\right[$.
Finalement le triangle correspondant est équilatéral.

Exercice 64 : [énoncé]
Notons A,B,C les points définissant notre triangle et O le centre du cercle circonscrit.
En introduisant les mesures α,β,γ des angles $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)$, $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$, on vérifie $\alpha+\beta+\gamma = 0 \quad [2\pi]$ et on peut calculer l'aire algébrique des triangles (OAB), (OBC) et (OCA) qui sont respectivement

$$\frac{1}{2}r^2\sin\alpha, \frac{1}{2}r^2\sin\beta \text{ et } \frac{1}{2}r^2\sin\gamma = -\frac{1}{2}r^2\sin(\alpha+\beta)$$

L'aire algébrique du triangle (ABC) est alors

$$f(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}r^2(\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta))$$

L'étude des points critiques de cette fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0,2\pi\right[^2$ conduit à résoudre le système

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta = \cos(\alpha+\beta) \end{cases}$$

dont les seuls solutions dans $]0, 2\pi[^2$ sont

$$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ et } \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$$

Ce sont les situations de triangles équilatéraux resp. direct et indirect.
L'extremum trouvé vaut

$$\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$$

Exercice 65 : [énoncé]
Méthode analytique :
L'intérieur du triangle et son bord forment un compact. La fonction considérée est continue sur celui-ci donc admet un maximum. Celui-ci ne peut être au bord car la fonction prend des valeurs strictement positives alors qu'elle est nulle sur le bord. Il existe donc un maximum à l'intérieur du triangle et celui-ci annule la différentielle de la fonction.
En introduisant un repère, $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(a,b)$ (ce qui est possible qui à appliquer une homothétie pour que $AB = 1$) la fonction étudiée est

$$f(x,y) = y(bx - ay)(b(x-1) - (a-1)y)$$

On résout le système formé par les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

Le calcul est très lourd sans logiciel de calcul formel mais on parvient à conclure.
Méthode géométrique (plus élégante) :
Le point M peut s'écrire comme barycentre des points A, B, C affectés de masses $a, b, c \geqslant 0$ vérifiant $a + b + c = 1$.
L'aire du triangle (MBC) est donné par

$$\frac{1}{2}\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC})\right|$$

Or

$$\overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BA} + b\overrightarrow{BB} + c\overrightarrow{BC}$$

donc

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = a\mathrm{Det}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

En notant $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC et d_A le distance de M à la droite (BC), on obtient

$$a = \frac{d_A.BC}{\mathcal{A}}$$

De façon analogue,

$$b = \frac{d_B AC}{\mathcal{A}} \text{ et } c = \frac{d_C AB}{\mathcal{A}}$$

avec des notations entendues.
Par suite, maximiser le produit $d_A d_B d_C$ équivaut à maximiser le produit abc avec les contraintes $a + b + c = 1$ et $a, b, c \geqslant 0$
La maximisation de $ab(1 - a - b)$ avec $a, b \geqslant 0$ et $a + b \leqslant 1$ conduit à $a = b = 1/3$, d'où $c = 1/3$ et le point M est au centre de gravité.

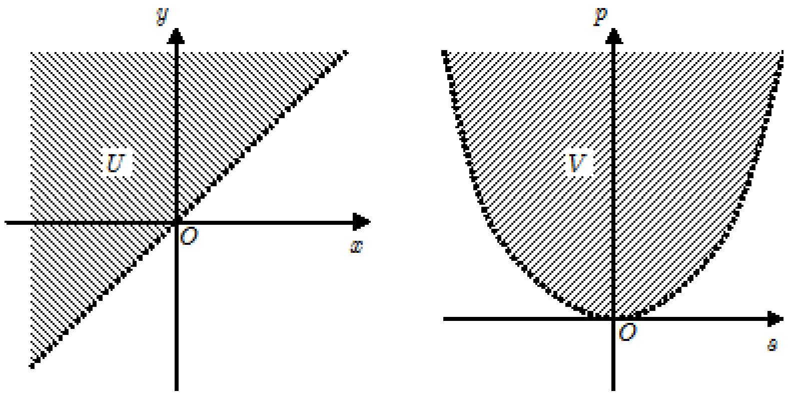

FIGURE 1 – Les ouverts U et V